Title	CR embedding theoremに関するpdeについて (多変数函数論にあらわれる解析と幾何)
Author(s)	倉西, 正武
Citation	数理解析研究所講究録 (1998), 1058: 60-76
Issue Date	1998-08
URL	http://hdl.handle.net/2433/62331
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
1058巻 1998年 60-76

CR embedding theorem に関する pde について

コロムビア大　倉西正武
MASATAKE KURANISHI

$\mathbb{C}^n$ の hyper surface M (次元 $2n-1$) が与えられたとき, $\mathbb{C}^n$ の type (0,1) の complex tangent vector で M に tangent なものの全体は M の complex tangent vector bundle $\mathbb{C}TM$ の sub-bundle L になる。このような L は次の性質を持って居る:

1) L の fiber dimension は $n-1$,

2) $L \cap \overline{L} = \{0\}$,

3) L の smooth section の全体は bracket で閉じて居る。

上の条件を満す sub-bundle L を CR-structure と呼ぶ。次元 $2n-1$ の manifold M に CR-structure L が与えられたとき, M を open subset U で cover して, 各 U の適当な embedding $U \subset \mathbb{C}^n$ をとれば, $L|U$ は上のように $\mathbb{C}^n$ の type (0,1) vector bundle によって

induce されるとき，Lに関して（local）embedding theorem が成立すると云ふ。

一般の CR structure L について embedding theorem が成立するかどうかはむづかしい問題なので，Lに適当な條件をつけて論じられて居る。このとき L の Levi-form が使はれる。

條件 1)–2) によって $\dim(\mathbb{C}TM/(L+\bar{L}))=1$ なので，$F\in TM$ をとって，$\mathbb{C}TM=\mathbb{C}F\oplus L\oplus\bar{L}$ とかける。Lの smooth sections X，Y に対し

$$[X,Y]\equiv\frac{1}{i}\mathcal{L}(X,Y)F \qquad (\mathrm{mod}\ L+\bar{L})$$

とおけば，$\mathcal{L}(X,Y)$ は L の各 fiber の上の hermitian form になって居る。$\mathcal{L}(X,Y)$ を L の Levi form とよぶ。$\mathcal{L}$ は F の取り方によるが，その conformal class は L によって unique にきまる。従って $\mathcal{L}$ が non-degenerate か又は definite かは L の性質である。$\mathcal{L}$ が definite のとき L は strongly pseudo convex であると云ふ。

dim M ≧ 7 で L が strongly pseudo convex ならば CR embedding theorem が成立することが知られて居る。dim M = 3 のときは，L が strongly pseudo convex であっても，embedding theorem が成立するとは限らない

ことは、Nirenberg 等の例によって知られて居る。dim M = 5 で strongly pseudo convex の場合については、未だ未解決である。Levi-form が definite の場合には、$\mathcal{L}$ の eigen-value の正負の適当な條件のもとで embedding theorem の成立することが知られて居る。

Embedding theorem が成立するかどうかは, pde の問題としてとらえることが出来る。Complex valued の unknown function f に関して、p.d.e

(1) Σ: $\bar{Z}f = 0$ for all $Z \in L$

を考えよう。Σ の解 $f_1, \dots, f_n$ が $U \subset M$ の上にあって独立ならば、$U \ni p \longrightarrow (f_1(p), \dots, f_n(p)) \in \mathbb{C}^n$ は $L|U$ を type (0, 1) の vector bundle から induce する embedding になって居る。従って Embedding Theorem が成立するかどうかは上のような解のある open set で M が cover されるかどうかと云ふことと equivalent になる。現に strongly pseudo convex で次元 ≥ 7 の場合の embedding theorem は上の意味で pde Σ をとくと云ふ形で証明された。この解き方は次のようになる：まず M の点 p をきめて、Σ を p のまはりで formal power series として解くことを考へる。條件 3) を使えば formal power series の解 $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n$ で独立なものの作れることがわかる。f_j^1 を smooth な函数でその p での Taylor series が $\tilde{f}_j$ になるものをとれば、$\omega_j(\bar{Z}) - \bar{Z}f_j^1$ are 小さい。もし小さい f_j^2 で $\omega_j(\bar{Z}) = \bar{Z}f_j^2$ になるものがあれば、$f_j = f_j^1 - f_j^2$ が求めるものになって居る。上で"小さい"と云ふのは、smooth な函数の vector space に topology を入れて、その意味で小さいと云ふことである。"$f_1^1, \ldots, f_n^1$ が独立のとき、f_j^2 が充分小さければ、$f_1^1 - f_1^2, \ldots, f_n^1 - f_n^2$ も独立になる" と云ふ性質をもつ topology であれば上の議論は成立することになる。High order の Sobolev norm はこのような topology を定義する。

上の $\omega_j(\bar{Z})$ を L の 1-form ω_j として捉えれば、方程式 $\omega_j(\bar{Z}) - \bar{Z}f_j^1$ は

$$\omega_j = \bar{\partial}_b f_j^1 \tag{2}$$

とかける。こゝで $\bar{\partial}_b$ は函数 f を 1-form $\omega(\bar{Z}) = \bar{Z}f$ に対應させる operator である。従って embedding theorem は方程式

$$\omega = \bar{\partial}_b f \tag{3}$$

を与えられた ω に対して連續的にとくと云ふ問題でおきかえられる。

Open set $U \subset M$ をきめて，U の上での L の smooth な p-form (skew-symmetric) の全体を $\Lambda^p(L)$ と書けば，上の $\bar\partial_b$ は $\Lambda^0(L) \longrightarrow \Lambda^1(L)$．これは De Rahm の exterior derivative $\Lambda^0 \longrightarrow \Lambda^1$ を L に restrict したものに外ならない。このようにして同じように $\bar\partial_b$-complex

(4) $\qquad \bar\partial_b : \Lambda^p(L) \to \Lambda^{p+1}(L)$

がつくれる。(3) がとけるためには $\bar\partial_b \omega = 0$ が必要条件であることは明らかであるから、

(5) 問題：適当な U をえらんで、$\bar\partial_b$-complex の $\Lambda^1(L)$ での exactness を連続性をこめて確立せよ

として embedding theorem を捉えることになる。この問題をとくことはかなり手間のかゝる仕事であった。

或る問題を pde をとく問題にかくことはたえずあることであるが、このような pde は unique にきまるわけではない。例へば Newton の力学の方程式は Hamilton 函数をつくって Hamilton の方程式にかける。こうした方が解の或種の性質がよく見えると云ふ利点がある。難しかった Riemann geometry の embedding theorem もうまい pde を使うことによってかなりかんたんな証明が出来るようになった。CR embedding theorem も新しい立場か

ら問題をみることによって新しい証明をみつけると云ふ試みがなされて居る。

Catlin は"$U\times[0,-1)$ の適当な open set $\tilde{U}$ をとってその上に complex structure をみつけて，もとのLが $\tilde{U}$ の type (0,1) vector bundle から induce されるようにする" と云ふ問題として embedding theorem をあつかって居る。これを pde の形にするには、L の formal な embedding があることを使って、Lに近い embeddable な CR structure L_1 をつくれることに注目する。従って $\tilde{U}\subseteq \mathbb{C}^n$ で $U\times\{0\}$ に induce される CR structure は L_1 であるとしてよい。L の $\tilde{U}$ への拡張は $\mathbb{C}^n$ の type (0,1) bundle T_1'' の deformation と考えられる。だから standard の complex structure の deformation theorem が使えて，T_1'-valued type (0,1) の 1-form ω で現される。従って吾々の pde は

(5) $$\bar{\partial}\omega+\frac{1}{2}[\omega,\omega]=0$$

に "ω が $U\times\{0\}$ に induce する CR structure が L になる" と云ふ boundary condition を加えたものになる。この boundary condition [redacted]が嫌ならば、T_1'' のかわりに L の almost complex structure としての拡張 T_0'' を使えばよい。T_0'' の deformation 理 of integrability condition も integrable complex structure の deformation を論ずるときと同じやり方でかけるから、(5) の

かはりに

(7) $$\bar{\partial}_{T_0''}\Phi + R(\Phi) = 0, \quad \Phi(L) = 0$$

を考へることになる。こゝで Φ は $\overline{T_0''}$-valued の T_0'' の上の 1-form のつくる space $\Lambda^1(T_0'', \overline{T_0''})$ の unknown な元, $\bar{\partial}_{T_0''}$ は standard exterior derivative の construction を T_0'' の場合にあてはめて使った p.d. operator

(8) $$\bar{\partial}_{T_0''} : \Lambda^p(T_0'', \overline{T_0''}) \longrightarrow \Lambda^{p+1}(T_0'', \overline{T_0''}),$$

$R(\Phi)$ は T_0'' によってきまる Φ とその partial derivatives との函数で, $T_0'' = T_1''$ の場合には、$\frac{1}{2}[\omega, \omega]$ となるものである。T_0'' は integrable でないので, $\bar{\partial}_{T_0''} \circ \bar{\partial}_{T_0''}$ は zero map ではない。(7) では boundary condition をかんたんにするかはりに、(6) よりふくざつな p.d.e. を考えることになって居る。しかし elliptic p.d.e の一般論的立場からみると この二つの間にはたいしたちがいはないのである。実際 Catlin は方程式 (6) をつかって居る。

筆者は今 L の CR frame bundle F を使って CR embedding theorem を論ずる方法を開発中である。F の中には L の local な geometric property はすべて store されて居るから、CR structure のぎろんに L の geometric structure (特に curvature) がいかに関与して居るかを浮き彫りにするのが この方法の狙ひである。M が complex domain D の

boundary で L が D から induce された CR structure の場合、D の Bergman kernel の singularity of asymptote をこの方法によって L の curvature とその derivative を使って書き現されることが期待される。

この方法は E. Cartan に由来する次の考へ方が基礎になつて居る：或る mathematical structure を考えるとき、一つの model case（これは homogenous structure）をきめて一般の場合を model structure の deformation として捉える。吾々の場合、model structure には complex ball B の boundary CR structure sphere S をとる。Strongly pseudoconvex L on M には formal embedding があることを使えば、embeddable な L_1 を L の非常に近くつくれる。$M \subset \mathbb{C}^n$ を L_1 を実現する embedding としたとき、$\mathbb{C}^n$ の適当な座標変換をすれば、M の方程式を S の方程式に（local に）非常に近く出来る。従って CR structure M は CR structure S に非常に近いと考えられるのである。そこで M を open submanifold $M \subset S$ と identify して、L を $\mathbb{C}TM \subseteq \mathbb{C}TS$ の sub-bundle で S の CR structure $L_S \subset \mathbb{C}TS$ に非常に近いものとしてよいことになる。

(9) $\quad M \subset S$ and $L, L_S \subset \mathbb{C}TS$.

S の CR automorphism group G は $\bar{B}$ の holomorphic automorphism group

の restriction になつて居るから、S と B との reference point p_S と B_S とをきめて、

(10) $$S = G/H_S \ , \qquad B = G/H_B$$

とかける。上によつて [redacted] principal bundles (G, S, H_S, p_S), (G, B, H_S, p_B) がそれぞれ S, B の上にきまる。(G, S, H_S, p_S) が S の上の frame bundle の定義である。B の complex structure 及び S の CR structure とを G の Maurer-Cartan form を使って書き現はすようにすると云ふのが E. Cartan の重要な idea である。Maurer-Cartan form は上の principal bundle の場合には Cartan connection の一つであるから、(S, L_S) の小さな deformation である (M, L) についても適当な principal bundle (F_L, M, H_S, p_M) とその上の Cartan connection ω_L を作って、CR structure L を ω_L で代表させると云ふ道がひらけることになる。Tanaka, Chern-Moser による CR equivalence 問題の解決は上の線にそってなされたと見ることが出来る。S が euclidean space G が the group of euclidean motion で M が Riemann manifold の場合に上に述べた方法をあてはめて考へていただければ、それが Levi-Civita connection の construction になつて居ることになり、この方法の有用性が理解出来ると思ふ。

上に述べたE. Cartanの考へを色々の場合に実行にうつしてみよう。$\mathbb{C}^n$のstandard complex chart $(z^1, \dots, z^n)$を使って $(\Phi^\alpha)_e = (\rho_B^* dz^\alpha)_e$ と書こう。Bのcomplex structureはG-invariantであるから、上の単位元eでの1-form $(\Phi^\alpha)_e$ をGのtransformationを使ってGの上のMaurer-Cartan formに拡長したものをΦ^αとすれば、Φ^αによってBのcomplex structureがきまることになる。もう少しくわしく云うには

(10) $$\Sigma_B = \mathbb{C}\Phi^1 + \cdots + \mathbb{C}\Phi^n \subset \mathbb{C}T^*G$$

とおき、Gの上の函数hがΣ_Bのintegralであると云ふことを、dhがΣ_Bのsectionであると云ふことで定義しよう。そうすれば、Σ_Bのintegralsの全体のsheafはBのholomorphic functionsのpull-backから作ったsheafに一致して居ることが云える。Gのlie algebraを$\mathfrak{g}$として、GのMaurer-Cartan formの全体を

(11) $$\omega_G : TG \longrightarrow \mathfrak{g}$$

としたとき、適当なprojection $\pi_B : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_1$ があって

(12) $$\Sigma_B = \pi_B \circ \omega_G$$

とすることが出来る。同じようにしてSのCR-functionsも適当なprojection $\pi_S : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ を使って

(13) $\qquad \Sigma_S = \pi_S \circ \omega_G$

の integrals として捉えることが出来る。

E-Cartan plan は上の (G, S, H_S, P_S) と Σ_S との construction を (M, L) の場合に出来るだけ実現することにある。先づ CR structure の定義をよくみると、unknown (H_S-) principal bundle F_M と unknown Cartan connection ω_M とを使って、M の CR-function を(上にのべた意味で) characterize する sub-bundle Σ_M を

(14) $\qquad \Sigma_M = \pi_S \circ \omega_M$

としてかけることがわかる。これに Cartan connection の定義と適当な torsion free 條件をつけ加えると、先づ F_M が unique にきまることが解る。ω_M は unique にならないので更に適当な條件をつけ加えて ω_M を unique にする。これを CR Cartan connection とよぶ。

こうして CR structure M を frame bundle (F_M, M, H_S, P_M) と CR Cartan connection ω_F とによって定められることになった。こうしてみると、B が Σ_B を使って現はされたことに注目すれば、M の embedding theorem は Σ_B に相当する sub-bundle Σ_M を F_M の上につくると云ふ問題でおきかえられることになる。それではどんな條件が Σ_M に必要であろうか? 先づ $\Sigma = \Sigma_B$ は次の條件をみたすことがすぐわかる。

1° Σ の fiber dimension は n, 2° $\Sigma \cap \bar{\Sigma} = \{0\}$

3° Σ の component で生成される exterior algebra の ideal

は d で閉じて居る。

$\Sigma \subset \mathbb{C}T^*\hat{M}$ で $\hat{M}$ の real dim. が $2n$ の場合、上は丁度 $\hat{M}$の上の
integrable almost complex structure の定義を dual な 1-form を使って
書き下したものになって居る。従ってこの場合には
Nirenberg–Newlander theorem によって
Σ によって $\hat{M}$ の complex structure がきまる。このことは
$\hat{M}$ の次元[redacted]によらないことがわかって居る:

(15) THOREM. Σ が $\tilde{\hat{M}}$ の上で上の条件を満たすならば projection
(local に) $\hat{M} \xrightarrow{\nu} D$ [redacted]と D の上の complex structure
が存在して、[redacted](D の holomorphic functions)$\circ\nu$ が Σ
の integrals [redacted]となるように出来る。

従って CR embedding theorem は次の2つの問題に
帰着されたことになる:

(i) $\mathbb{C}T^*M$ の sub-bundle Σ で条件 $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ を満たす
ものをみつけよ。Σ できまる complex manifold を D とする。

(ii) M を D の boundary に[redacted] attach して L が D の complex
structure から induce される CR structure になる様にせよ。

実際には (ii) が出来るような Σ を (i) で求めよと云ふ問題で
ある。

問題 (i) は次のようにして pde の問題になおせる: Σ_B
が (12) の様にかけることに注目すれば、Σ の第一候補は
$\Sigma_1 = \pi_B \circ \omega_M$ である。L が L_S に近いから、条件 1° と 2°

と論じて居るが、3)' は満されて居るとはかぎらない。実際に計算してみると curvature が 3)' をみたすための obstruction になって居る。従って Σ_1 の deformations Σ の中から (i) の條件をみたすものをさがすことになる。そうするには、F_M の 1-form Φ^α ($\alpha=1,\dots,n$) で Σ_1 を generate するようなものをきめて、unknown 1-form A^α で $\Phi^\alpha + A^\alpha$ が (i) の條件をための A^α の條件が書き下せばよい。こうして unknown n-vector valued 1-form A $=(\dots, A^\alpha, \dots)$ に関する pde

(13) $$R(A) = 0$$

を解く問題として問題 (i) を捉えることが出来た。F_S と F_M とは近いので、F_S と F_M とを適当な diffeomorphism で identify しておくと計算に便利である。

$R(A)$ を具体的に記述する前に、Embedding theorem をとくために考へられた 3つの pde (3), (7), (13) をとく一般な方法をのべよう。今までのところ、これらはいつも sucessive approximation の方法でとかれて居る：先づ最初に充分近似度の高い近似解から出発して、sucessive により近似度の高い近似解の sequence を作って解にしゅうれんさせるのである。このとき pde の linear approximation を使うことになる。(13) の場合で云えば、A での linear approximation は ~~A に関する linear pde R'_A~~ linear partial differential operator $R'_A(u)$ で "$R(A+\varepsilon u) \equiv R(A) + \varepsilon R'_A(u) \mod \varepsilon^2$" できまるものである。(3) の場合には、pde が linear なので物

linear approximation は (3) と一致する。(7) の場合には $\mathfrak{F}_{T''_0}$ の small deformation になって居る。(13) の場合に R'_A をかき下すには少し準備が要る。

B のかわりにその Cayley transform を使ふ方が便利である。これは $\mathbb{C}^n$ の domain

(14) $$Q^+ : \operatorname{Im} z^n > \frac{1}{2}|z'|^2, \quad z' = (z^1, \dots, z^{n-1}).$$

従って S のかわりに Q^+ の boundary CR structure

(15) $$Q : \operatorname{Im} z^n = \frac{1}{2}|z'|^2,$$

を考えることにする。これからは G は Q^+ の holomorphic automorphism (同時に Q の CR automorphism) group である。Reference point $P_Q = (0)$, $P_{Q^+} = (0, i)$. Isotropy group は H_Q, H_{Q^+}. $\xi = (\xi', \xi^n)^{t} \in \mathbb{C}^n$ に対して matrix

(16) $$T(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \xi' & I & 0 \\ \xi^n & i(\xi')^* & 1 \end{pmatrix}$$

を考えれば、これは $\mathbb{C}^n$ で parametrize される matrix group $\tilde{\mathfrak{N}}$ になって居る。$\tilde{\mathfrak{N}}$ は $\mathbb{C}^n$ に operate して居る：

(17) $$T(\xi) z = (z' + \xi', z^n + \xi^n + i\langle z', \xi'\rangle)$$

$\mathfrak{N} = \{T(\xi);\ \operatorname{Im}\xi^n = \frac{1}{2}|\xi'|^2\}$ は $\tilde{\mathfrak{N}}$ の subgroup で Q の上に transitive に operate して居る。$\mathfrak{N}^+ = \{T(\xi);\ \operatorname{Im}\xi^n > \frac{1}{2}|\xi'|^2\}$ は multiplicative に closed で その operation は Q^+ を保存して居る。しかし $\mathfrak{N}^+$ のかわりに matrix

(18) $T(\xi,r)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{r}} & & \\ & I & \\ & & \sqrt{r} \end{pmatrix} T(\xi)$, $\xi \in Q$ and $r>0$

の全体を考へれば、これは group になつて居て

(19) $T(\xi,r)z = (\sqrt{r}(z'+\xi'),\ r(z^n+\xi^n+i\langle z',\xi'\rangle))$

で $\mathbb{C}^n$ に operate させると、Q^+ の上に transitive に operate して居る。上の operation は $(n+1)\times(n+1)$ matrix を $\mathbb{CP}^n$ の homogeneous coordinate $[\hat{z}]$ に operate させ、$\mathbb{C}^n \ni z \to [1,z] \in \mathbb{CP}^n$ として $z \in \mathbb{C}^n$ に operate したものになつて居る。従って $T(\xi,r)^*$ の全体も Q^+ の automorphism、$H_{\mathbb{C}}$、と考へられる。実際に計算して見ると、$H_{\mathbb{C}} \subseteq H_Q$ = Q の isotropy group で

(20) $H_Q = H_{\mathbb{C}} \cdot H_{SU}$, $H_{SU} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$,

$u \in$ special unitary group,

$H_{\mathbb{C}} = \{H(\xi);\ \xi \in Q^+\}$, $H(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -i\beta^* & \frac{1}{\sqrt{2}}b \\ 0 & I & \sqrt{2}\beta \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

(21) $\operatorname{Im} b = -\frac{2}{2}|\beta|^2$, $\xi' = \frac{i\sqrt{2}}{1+ib}\beta$, $\xi^n = \frac{i\sqrt{2}}{1+ib}$

とかけることがわかる。

以下 z は Q の元、ξ は Q^+ の元としよう。projections $p_Q: G \to G/H_Q$, $p_{Q^+}: G \to H_{Q^+}$ は上の decomposition を使えば次の様にかける；

(13)-(14) に注目して、同じように $\tilde{\tilde{\Sigma}}_M$, Φ_M^α を作れる。

$$(22)\quad \begin{aligned} &\rho_Q : \mathfrak{N}\cdot H_Q \ni T(z)\cdot H_Q \longrightarrow z \in Q \\ &\rho_{Q^+} : \mathfrak{N}\cdot H_Q = \mathfrak{N}\cdot H_{\mathbb{C}}\cdot H_{SU} \ni T(z)\,H(\xi)\,H_{SU} \longrightarrow T(z)\xi \in Q^+ \end{aligned}$$

上の(12)で述べた Σ_B の construction を (22) で与えられた座標を使って書いてみこ、これを Σ_Q とすれば、Σ_Q は $\mathbb{C}T^*(\mathfrak{N}\cdot H_Q)$ の sub-bundle $\tilde{\tilde{\Sigma}}_Q$ の pull-back になって居ることがわかる。従って Σ_M の deformation のかわりに $\tilde{\tilde{\Sigma}}_M$ の($\mathfrak{N}\cdot H_Q$ の上での) deformation を考えればよいことになる。ρ_{Q^+} の image として考えられたときの Q^+ の元を $\xi_\# = (\ldots, \xi_\#^\alpha, \ldots)$ と書くことにすれば、$d\xi_\#^\alpha$ を G の identity element での 1-form に pull-back したものを invariant に拡張した 1-form Φ^α, $\alpha = 1, \ldots, n$, が $\tilde{\tilde{\Sigma}}_Q$ の base になって居る。$\tilde{\tilde{\Sigma}}_M$ の deformation は

$$(23)\qquad \Phi^\alpha + A^\alpha$$

から生成される。こゝで A^α は $\mathfrak{N}\cdot H_Q \cong Q \times Q^+$ の上の unknown 1-form である。従って (23) で生成される sub-bundle が integrable になるための条件を記述する $R(A)$ の differential $R'_A(u)$ の variable u も $Q \times Q^+$ の上の 1-form になる。$R'_A(u)$ を計算してみると、A によってきまる differential operator の sequence のなかにはめこめることが解る。この sequence は次の形の sequence の特別の場合になって居る;

Manifold N の上に complex valued 1-form ξ^λ, $\lambda \in$ a set of indexes Π, が与えられたとせよ。ξ^λ は linearly indep. で $d\xi^\lambda = \sum c^\lambda_{\mu\sigma}\xi^\sigma \wedge \xi^\mu$ が

更に 1st order differential operator X_λ (matrix coef.) が与えられて居るとする。X_λ は vector space V-valued の function に operate し，その principal part は scalar diff. op. (i.e. diagonal matrix) であると仮定する。与えられた system ξ^λ, X_λ を $\mathfrak{X}$ で現そう。$\Lambda^p(\mathfrak{X})$ を

$$u = \frac{1}{a!}\sum u_{\lambda_1\cdots\lambda_a}\xi^{\lambda_1}\wedge\cdots\wedge\xi^{\lambda_a}$$

形の V-valued の a-form 全体のつくる vector space とする。

$$D : \Lambda^p(\mathfrak{X}) \longrightarrow \Lambda^{p+1}(\mathfrak{X})$$

を

$$Du = \frac{1}{a!}\sum (X_\lambda u_{\lambda_1\cdots\lambda_a})\xi^\lambda\wedge\xi^{\lambda_1}\wedge\cdots\wedge\xi^{\lambda_a} + \sum u_{\lambda_1\cdots\lambda_a}\, d(\xi^{\lambda_1}\wedge\cdots\wedge\xi^{\lambda_a}).$$

今問題にして居る $R_A'(u)$ は上の D, $p=1$, の形をして居る。吾々の場合 λ の index set Π は $s=0,1,\dots,n-1$; $j, \bar{j}=1,\dots,n-1$; $[s]$ で表される $2n+n-1$ 個の元からなる。ξ^0 は real valued, ξ^j は complex valued で $Q=M$ の pull back になって居る 1-form で，$\xi^\alpha=0$ $(\alpha=0,1,\dots,n-1)$ が CR structure L の定義になって居る。$\xi^{\bar j}=\overline{\xi^j}$, $\xi^{[s]}=d\xi^s$.

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \xi^0} + R_0, \quad X_j = \frac{\partial}{\partial z^j} + \frac{i}{2}\bar z^j\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \xi^j} + R_j$$

$$P_{\bar j} = \frac{\partial}{\partial \bar z^j} - \frac{i}{2} z^j\frac{\partial}{\partial x} - i\xi^j\frac{\partial}{\partial \xi^0} + R_{\bar j}, \quad P_{[s]} = \frac{\partial}{\partial \xi^s} + R_{[s]},$$

ここで R_λ は A と L とに depend する小さな deformation term である。$\bar\partial_b$ も $\bar\partial$ と上の特別の場合になって居る。